Sujet

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer f', la dérivée de f et f'' la dérivée seconde de f.

b. Étudier le sens de variation de f'.

c. En déduire que, pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

d. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

e. Donner une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

f. En déduire que, pour tout $x \leqslant 2$, $f(x) \leqslant 2x + 1$.

2. On admet que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α.

a. Prouver que, sur $\mathbb{R}$, résoudre l'équation $f(x) = 2$ équivaut à résoudre $\dfrac{e^x}{e^x + 1} = x$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction h définie sur $[0\,;1]$ par $h(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

c. En déduire que, si x appartient à $[0\,;1]$, alors :

$$0 \leqslant h(x) \leqslant 1.$$